**Chapitre 5 – Intégrales à paramètres**

Dans ce chapitre, on considèrera un intervalle de .

Théorème :

Soit une fonction continue. Alors la fonction

est définie et continue sur .

Théorème :

Soit . On suppose que

1. est continue sur
2. admet des dérivées partielles par rapport à sa première variable, notée , et que est continue sur .

alors la fonction est définie et de classe sur et :

Théorème : Soient continue et continues. Alors la fonction

est définie et continue sur .

Théorème : Soient continue, admettant une dérivée partielle continue sur et deux fonctions de classe . Alors la fonction

est de classe sur , et

**2. Intégrales à paramètres généralisées**

Théorème : (Continuité par domination)

Soit . On suppose que :

1. est continue sur
2. Il existe continue par morceaux et intégrable sur vérifiant

Alors la fonction est définie et continue sur .

Idée : ⍟

Soit . Montrons que est continue en , par caractérisation séquentielle, cela équivaut à montrer que tq ,

Soit une suite d’éléments de qui converge vers . Alors ,

Où

1. est continue (donc c.p.m) sur puisque est continue sur
2. Soit , par continuité de

Donc la suite de fonctions CVS sur vers , qui est continue donc c.p.m sur puisque est continue sur .

1. c.p.m et intégrable sur tq

Ainsi par le théorème de convergence dominée,

Ainsi est continue en , donc est continue sur .

Corollaire :

Soit . On suppose que :

1. est continue sur
2. Pour tout segment , il existe continue par morceaux et intégrable sur vérifiant

Alors la fonction est définie et continue sur .

Exemple : Continuité de

On pose

* est continue sur
* Soit un segment

Avec indépendant de .

Remarque : Comme la continuité est une propriété locale, on peut restreindre le « domaine du  » mais **on ne peut pas modifier le domaine d’intégration**.

R2 :

Pour étudier la limite de lorsque avec discontinue en ou est une extrémité de (ou ).

* Par majoration directe : on essaie d’intuiter la limite puis on raisonne grâce à des changements de variables et des IPP
* En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite :

Soit , on a

On se donne une suite quelconque qui tend vers , alors

Puis on essaie d’utiliser les théorèmes d’interversion lim/sur les suites de fonctions (CVU sur un segment ou théorème de convergence dominée)

**3. Dérivabilité**

Théorème :

Soit . On suppose que :

1. La fonction est continue sur
2. Il existe une fonction continue par morceaux et intégrable sur telle que
3. La fonction admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée , qui est continue sur ,
4. Il existe une fonction continue par morceaux et intégrable sur telle que

Alors la fonction est définie et de classe sur . De plus,

Exemple : En étudiant la fonction , déterminer une expression de pour tout . On admettra que .

Posons

De sorte que

* où et

sont polynomiales donc de classe sur , à valeurs dans et exp et cos sont de classe sur , donc est de classe sur .

Par conséquent, on a bien les (i) et (iii) du théorème.

(ii) Soit ,

avec continue (donc c.p.m) sur

De plus, , donc , or la fonction de Riemann est intégrable sur car (pour tout ).

Ainsi est intégrable sur

Donc d’après le théorème de dérivation par domination, est de classe sur .

Et ,

On opère une intégration par parties généralisée en posant et

On a

Donc est solution de l’équation différentielle du premier ordre

Par conséquent, il existe tel que ,

, or

Et d’autre part,

Ainsi .

Théorème :

Soit . On suppose que :

1. La fonction est continue sur
2. Pour tout segment il existe une fonction continue par morceaux et intégrable sur telle que
3. La fonction admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée , qui est continue sur ,
4. Pour tout segment il existe une fonction continue par morceaux et intégrable sur telle que

Alors la fonction est définie et de classe sur . De plus,

Exercice : Soit

Montrer que est solution sur de l’équation diff

puis en déduire la valeur de pour tout .